



باسمه تعالی
وزارت آموزش و پرورش
اداره آموزش و پرورش ناحیه چهار تبریز

دبیرستان غیر دولتی صدرای نور

نام: سوالات درس: ریاضیات امتحانات نیم سال اول: ۹۹-۰۰ تاریخ امتحان ۱۳۹۹/۱۰/۱۷
نام خانوادگی: پایه: دوازدهم ساعت شروع: مدت زمان امتحان: ۱۰۰ دقیقه شماره صندلی:

نام و نام خانوادگی دبیر: نرگس اصلانی گرمی نمره به عدد: نمره به حروف:

تاریخ و امضا:

| ردیف | پيامبر اکرم(ص): « نیکوکاری کامل آن است که در نهان همان را انجام دهی که در آشکارا انجام می دهی » | بارم |
|------|--|-----------|
| ۱ | گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی x, y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$) | ۱/۲۵ ۱ |
| ۲ | اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟ | ۱/۲۵ ۱ |
| ۳ | اگر $a > 1$, $a 9k + 4$, $a 5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است. | ۱ |
| ۴ | اگر دو عدد $(3a - 5)$, $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید. | ۱ |
| ۵ | باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید. | ۱/۵ |
| ۶ | ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است. | ۱ |
| ۷ | ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند. (راهنمایی: فرض کنید، $(m, m + 1) = d$ و ثابت کنید $d 1$ و نتیجه بگیرید: $d = 1$). | ۱/۵ |
| ۸ | اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند. | ۱ |
| ۹ | از رابطه همنهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192 \pmod{84}$ ، کدام نتیجه گیری در پیمانه ۷ نادرست است؟ (۱) $2a \equiv -1 \pmod{7}$ (۲) $a \equiv 4 \pmod{7}$ (۳) $a \equiv 3 \pmod{7}$ (۴) $3a \equiv 2 \pmod{7}$ | ۰/۵ |
| ۱۰ | برای درستی گزاره « $n^2 + 3n + 13$ به ازای هر عدد طبیعی n ، عددی اول است »، می توان از روش استفاده کرد. (۱) اثبات- در نظر گرفتن همه حالت ها (۲) اثبت- برهان خلف (۳) رد- مثال نقض (۴) رد- برهان خلف | ۰/۵ |
| ۱۱ | جاهای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند: ۱) $a c, b c$ ۲) $\forall m > 0, \dots$ | ۱ |
| ۱۲ | یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k - منتظم رسم کنید به طوری که: الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. | ۱ |
| ۱۳ | ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است. | ۱ |

| | | |
|-----|--|------------|
| ۱ | <p>از گراف های زیر کدام ساده است؟</p> | ۱۴ |
| ۱ | <p>در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس های زوج عددی و تعداد رأس های فرد عددی است.</p> <p>(۱) فرد-فرد (۲) فرد-زوج (۳) زوج-فرد (۴) زوج-زوج</p> | ۱۵ |
| ۰/۵ | <p>در گراف ۳-منتظم، $q = 2p - 3$ است، مرتبه این گراف کدام است؟</p> <p>(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۷</p> | ۱۶ |
| ۱ | <p>گراف G در شکل زیر رسم گردیده است. اگر $x \in V(G)$، آنگاه به ازای چند رأس متمایز x، $N_G[x] = \{a, b, c, d\}$ است؟</p> <p>(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴</p> | ۱۷ |
| ۱ | <p>در گراف مقابل $N_G(g) - N_G(c)$ کدام است؟</p> <p>(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱</p> | ۱۸ |
| ۱ | <p>در گراف ۳-منتظم روبه رو، چند، دور با طول ۴، موجود است؟</p> <p>(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹</p> | ۱۹ |
| ۱ | <p>کدام یک از وضعیت های زیر غیر ممکن است؟</p> <p>(۱) در یک میهمانی ۱۷ نفری، هر فرد دقیقاً با ۵ نفر دست بدهد. (۲) در یک میهمانی تعداد افرادی که با فردی دوست هستند، زوج است. (۳) در یک کتابخانه تعداد کتاب هایی که دارای نماد صفحات فرد باشد، عدد فرد است. (۴) در یک گروه از انسان ها همیشه دو نفر با تعداد دوست مساوی وجود دارد.</p> | ۲۰ |
| ۲۰ | جمع نمره | موفق باشید |



دبیرستان غیر دولتی صدرای نور

نام: سوالات درس: ریاضیات
گسسته

امتحانات نیم سال اول: ۹۹-۰۰ تاریخ امتحان:
ساعت شروع: مدت زمان امتحان: ۱۰۰ دقیقه شماره صندلی:

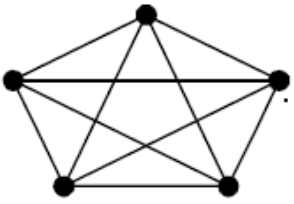
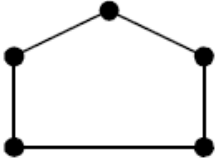
نام خانوادگی: پایه: دوازدهم

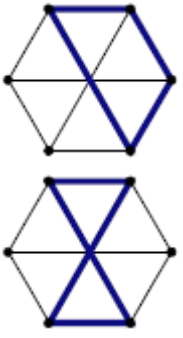
نام و نام خانوادگی دبیر: نرگس اصلانی گرمی نمره به عدد: نمره به حروف:

تاریخ و امضا:

| ردیف | پيامبر اکرم(ص): « نیکوکاری کامل آن است که در نهان همان را انجام دهی که در آشکارا انجام می دهی » | بارم | | | | | | | | | | | | | | |
|------|---|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|
| ۱ | پاسخنامه تشریحی $2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0, (x - y)^2 \geq 0$ | ۱/۲۵ | | | | | | | | | | | | | | |
| ۲ | روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم: <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>ش</td><td>ی</td><td>د</td><td>س</td><td>چ</td><td>پ</td><td>ج</td> </tr> <tr> <td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۵</td><td>۶</td> </tr> </table> $29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \rightarrow 131 \equiv 5 \pmod{7}$ <p>که متناظر این عدد در جدول روز پنج شنبه را نشان می دهد.</p> | ش | ی | د | س | چ | پ | ج | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۱/۲۵ |
| ش | ی | د | س | چ | پ | ج | | | | | | | | | | |
| ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | | | | | | | | | | |
| ۳ | نکته: (۱) اگر عدد a عدد b را عاد کند، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می شمارد. $a b \wedge a c \Rightarrow a mb \pm nc$ (۲) $a 9k + 4 \Rightarrow a 45k + 20$ $a 5k + 3 \Rightarrow a 45k + 27 \Rightarrow a 7 \rightarrow a = \pm 1$ یا $\pm 7 \xrightarrow{a>1} a = 7$ | ۱ | | | | | | | | | | | | | | |
| ۴ | طبق فرض داریم: $3a - 5 \equiv 4a - 7 \pmod{10} \rightarrow 10 (4a - 7) - (3a - 5) \rightarrow 10 a - 2 \rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \quad (I)$ $\xrightarrow{(I)} 9a \equiv 2 \times 9 \equiv 18 \pmod{10} \quad (II)$ $\xrightarrow{(II)} 9a + 6 \equiv 18 + 6 \equiv 24 \pmod{10}$ | ۱ | | | | | | | | | | | | | | |
| ۵ | می توان نوشت: $32 = 2^5 \equiv 9 \pmod{23}, 2^{11} = (2^5)^2 \times 2 \equiv 9^2 \times 2 \equiv 12 \times 2 \equiv 1 \pmod{23}$ $\Rightarrow (2^{11} + 7) \times 9 \equiv (1 + 7) \times 9 \equiv 3 \pmod{23}$ | ۱/۵ | | | | | | | | | | | | | | |

| | | |
|-----|---|----|
| ۱ | <p>می توان نوشت $۱۱ + ۱۲ = ۲۳$ بنابراین $(۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱}) = ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} = ۲۳^{۵۱}$ که با توجه به سؤال قبل $(۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$ بنابرین $۱۱ \times ۱۲ \mid (۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})$ بنابرین $۱۳۲ \mid ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}$</p> | ۶ |
| ۱/۵ | <p>الف) فرض کنید $d \mid (m, m + 1)$ آن گاه می توان نوشت:</p> $\left. \begin{array}{l} d \mid m \\ d \mid m + 1 \end{array} \right\} \rightarrow d \mid m + 1 - m \rightarrow d \mid 1$ <p>حال چون $d > 0$ می توان نتیجه گرفت $d = 1$ یعنی عدد دو صحیح و متوالی $m, m + 1$ نسبت به هم اول اند.</p> <p>ب) فرض کنید $d \mid (2m + 1, 2m + 3)$ آن گاه می توان نوشت:</p> $\left. \begin{array}{l} d \mid 2m + 1 \\ d \mid 2m + 3 \end{array} \right\} \rightarrow d \mid 2m + 3 - 2m - 1 \rightarrow d \mid 2$ <p>با توجه به اینکه $d > 0$ می توان نتیجه گرفت $d = 1$ یا $d = 2$ چون هیچ عدد فردی مقسوم علیه زوج ندارد بنابراین $d = 1$.</p> | ۷ |
| ۱ | <p>فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha - \beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی $\alpha + \beta$ گویا است پس مجموع آن ها یعنی $\alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha$ گویاست در نتیجه α گویا است که با فرض در تناقض است پس $\alpha - \beta$ گنگ است.</p> <p>فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha + 2\beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی چون $\alpha + \beta$ گویا است پس تناقض آن ها یعنی $\beta = \alpha + 2\beta - (\alpha + \beta)$ گویا است که با فرض در تناقض است پس $\alpha + 2\beta$ گنگ است.</p> | ۸ |
| ۰/۵ | <p>گزینه ۲</p> <p>تذکر: تقسیم در هم نهشتی</p> $\left\{ \begin{array}{l} ac \equiv bc \\ (c, m) = d \end{array} \right. \xrightarrow{\div c} a \frac{m}{d} \equiv b$ $\begin{array}{ccc} ۸۴ & & ۷ \quad ۷ \\ ۳۶ \equiv ۱۹۲ & \xrightarrow{\div ۱۲} & ۳a \equiv ۱۶ \equiv ۲ \end{array}$ $\begin{array}{ccc} ۷ & ۷ & ۷ \\ ۳a \equiv ۲ \equiv ۹ & \xrightarrow{\div ۳} & a \equiv ۳ \end{array}$ $\begin{array}{ccc} ۷ & & ۷ \quad ۷ \\ a \equiv ۳ & \xrightarrow{\times ۲} & ۲a \equiv ۶ \equiv -۱ \end{array}$ | ۹ |
| ۰/۵ | <p>گزینه ۳ اگر به جای n عدد ۱۳ قرار بدهیم داریم:</p> $n^2 + 3n + 13 = 13^2 + 3 \times 13 + 13 = 13 \times 17$ <p>بنابرین عدد مورد نظر مرکب است و درستی حکم رد می شود.</p> <p>پس برای رد حکم از مثال نقض استفاده کردیم.</p> | ۱۰ |

| | | |
|-----|---|----|
| ۱ | $\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$ (الف) | ۱۱ |
| ۱ | الف) بیشترین مقدار k برای ۵ رأس برابر ۴ است که گراف ۴-منتظم یا همان گراف کامل ۵ رأسی است (K_5) که درجه هر رأس آن برابر ۴ است.  K_5 ب) کمترین مقدار k برای ۵ رأس برابر ۲ است که گراف ۲-منتظم یا همان گراف C_5 است که درجه هر رأس برابر ۲ است.  C_5 | ۱۲ |
| ۱ | فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G , B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج است بنابراین تفاضل آن ها نیز زوج خواهد شد. بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است. | ۱۳ |
| ۱ | الف- ساده نیست زیرا بین ۲ رأس v_1 و v_2 بیش از یک یال رسم شده است. ب- ساده نیست زیرا بین ۲ رأس v_1 و v_2 بیش از یک یال رسم شده است. ج- ساده نیست زیرا در رأس v_1 طوقه وجود دارد. د- ساده نیست زیرا بین ۲ رأس v_2 و v_3 بیش از یک یال رسم شده است. ه- گراف ساده است. | ۱۴ |
| ۱ | گزینه ۴ تعداد رئوس درجه فرد، همواره زوج است و تعداد کل رئوس زوج است پس تعداد رئوس زوج نیز عددی زوج است در واقع تعداد رئوس درجه زوج از جنس مرتبه گراف است. | ۱۵ |
| ۰/۵ | گزینه ۲ در گراف ۳-منتظم با مرتبه p داریم $q = \frac{3p}{2}$ با توجه به فرض $2p - 3 = \frac{3p}{2} \Rightarrow 4p - 6 = 3p \Rightarrow p = 6$ | ۱۶ |
| ۱ | گزینه ۱ نکته: رأس v را در گراف G در نظر می گیریم به مجموعه رأس هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند همسایگی باز رأس v می نامیم و با $N_G(v)$ نمایش می دهیم، اضافه کردن خود رأس v به $N_G(v)$ ، | ۱۷ |

| | | | |
|----|---|------------|----|
| | <p>همسایگی بسته رأس v را می دهد و آن را به فرم $N_G(v)$ نمایش می دهند.</p> <p>$N_G[x]$ همسایگی بسته رأس x است. بنابراین شامل رأس x می باشد. یعنی x باید به مجموعه $\{a, b, c, d\}$ تعلق داشته باشد. ولی با توجه به نمودار گراف، تمام رئوس a, b, c, d با رأس e مجاور هستند و مجموعه همسایگی بسته آنها لزوماً شامل رأس e نیز خواهد بود. پس به ازای هیچ رأس x، همسایگی بسته این رأس برابر $\{a, b, c, d\}$ نیست.</p> | | |
| ۱ | <p>گزینه ۲</p> <p>$N_G(g) = \{b, c, d, f\}, N_G(c) = \{b, g, a, e\}$ $N_G(g) - N_G(c) = \{c, d, f\}$</p> | | ۱۸ |
| ۱ | <p>گزینه ۴</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>→ ۶ دور به طول ۴</p> <p>→ ۳ دور به طول ۴</p> </div> <div style="margin-left: 20px; font-size: 4em;">}</div> <div style="margin-left: 20px;"> <p>→ کلاً ۹ دور به طول ۴ داریم</p> </div> </div> | | ۱۹ |
| ۱ | <p>گزینه ۱ گزینه (۱) معادل یک گراف ۵-منتظم مرتبه ۱۷ است که چنین گرافی وجود ندارد.</p> | | ۲۰ |
| ۲۰ | جمع نمره | موفق باشید | |